Fen-Edebiyat Fakültesi

	ARASINAV SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz 4	
İmza:	Sınav Tarihi: 12 Nisan 2022	

Süre 75dk.

1. Aşağıdaki limitleri varsa sıkıştırma lemmasını kullanarak olduğunu ispatlayın, yoksa olmadıklarını gösterin.

   (a) (15 puan) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2 - x^2y^3}{x^4+y^6}$

   (b) (15 puan) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

Çözüm:
(a) $y = kx^{2/3}$ yönünden yaklaşırsak

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3k^2x^{4/3} - x^2k^3x^2}{x^4+k^6x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3+4/3-4-4}k^2 - k^3}{1+k^6} = \frac{-k^3}{1+k^6}$$

Yönlü limit seçilen yöne bağlı olduğu için, ikili limit yoktur.

(b)

$$\left|\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| \le \left|\frac{y^2}{x^6+y^2}\right| \left|x^3\right| \le |x|^3$$

Sıkıştırma lemmasından limit sıfır çıkar.

2. (20 puan) $z = x^c e^{-y/x}$ fonksiyonunun $yz_{yy} = z_x - z_y$ denklemini sağlaması için c sabiti ne olmalıdır?

Çözüm: $u = e^{-y/x}$ yazarsak $z_x = cx^{c-1}u + x^{c-2}yu$, $z_y = -x^{c-1}u$, $z_{yy} = x^{c-2}u$. Yerine yazarsak $c = -1$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun.

   (a) (10 puan) $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevlerini hesaplayın.

   (b) (15 puan) f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türetilebilir olmadığını gösterin.

Çözüm:
(a)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1, \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

(b)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{f(h,k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{\frac{h^3}{(h^2+k^2)} - h}{(h^2+k^2)^{1/2}}\right|$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right|$$

Yukarıdaki son limite $k = ah$ yönünden yaklaşırsak yönlü limit a değerine bağlı çıkar. İkili limit yoktur.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) (10 puan) f'nin $(0,0)$ noktasındaki ve herhangi bir $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ birim vektörü yönündeki yönlü türevini, yönlü türevin tanımını kullanarak hesaplayın.

(b) (15 puan) f'nin $(1,0)$ noktasında en fazla arttığı yönü bulun.

Çözüm:

(a)

$$\frac{d}{dt} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) \,|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2 u_1^2 t u_2}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}\right)|_{t=0} = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^2 u_2$$

(b)

$$f_x = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2 y 2x}{(x^2+y^2)^2} \implies f_x(1,0) = 0$$

$$f_y = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y 2y}{(x^2+y^2)^2} \implies f_y(1,0) = 1$$

f en fazla $\nabla f = \mathbf{j}$ yönünde artar.